1. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci. (1 bod)

   (b) Spočtěte stacionární rozdělení ve vnořeném řetězci. (1 bod)

   (c) Spočtěte stacionární rozdělení v původním řetězci. (1 bod)

   a) Matice intenzit ve vnořeném řetězci má následující tvar

$$\mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) Kromě normující podmínky $1 = \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* + \pi_4^*$ máme následující požadavky

$$\begin{aligned} \pi_1^* &= \frac{1}{2}\pi_2^* + \frac{1}{3}\pi_3^* + \pi_4^* \\ \pi_2^* &= \pi_1^* \\ \pi_3^* &= \frac{1}{2}\pi_2^* = \frac{1}{2}\pi_1^* \\ \pi_4^* &= \frac{2}{3}\pi_3^* = \frac{1}{3}\pi_1^*. \end{aligned}$$

   Stacionární rozdělení je pak tvaru $\pi^{*\mathsf{T}} = \pi_1^*(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \pi_1^*(6, 6, 3, 2)/6 = (6, 6, 3, 2)/17$.

   c) Kromě normující podmínky $1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$ máme následující požadavky

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 \\ 4\pi_2 &= \pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 \\ 9\pi_3 &= 2\pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_3 = \frac{2}{9}\pi_2 = \frac{1}{18}\pi_1 \\ 4\pi_4 &= 6\pi_3 \quad \Rightarrow \quad \pi_4 = \frac{3}{2}\pi_3 = \frac{1}{12}\pi_1. \end{aligned}$$

   Stacionární rozdělení je pak tvaru $\pi^{\mathsf{T}} = \pi_1(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}) = \pi_1(36, 9, 2, 3)/36 = (36, 9, 2, 3)/50$.

2. Uvažujte továrnu s celkem třemi stroji a se třemi opraváři. Každý stroj pracuje nezávisle na ostatních strojích a na jejich případných opravách i na tom, jak dlouho již pracuje a to s průměrnou dobou do poruchy 1 hodina. Každý porouchaný stroj je ihned opravován opravářem s tím, že opravy jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1/2 hodiny. Označme X_t počet porouchaných strojů v čase $t \geq 0$.

   (a) Sestavte matici intenzit přechodu řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$. (2 body)

   (b) Najděte stacionární rozdělení řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$ (pokud existuje). (2 body)

   (c) Předpokládejte, že na počátku směny jsou všechny stroje v pořádku. Spočtěte střední hodnotu doby, než se nějaký stroj porouchá. (1 bod)

a) Zde individuální intenzita nárůstu (příchodu) je $\lambda = 1/\text{hod}$ a individuální intenzita obsluhy (odchodu, poklesu) je $\mu = 2/\text{hod}$. Celková intenzita nárůstu je $\lambda_j = (3-j)\lambda$ a poklesu $\mu_j = j\mu$. Pak

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

b) Stacionární rozdělení existuje a splňuje $\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}\cdots\lambda_0}{\mu_j\cdots\mu_1}\pi_0 = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\pi_{j-1}$. Postupně tak dostaneme

$$\pi^{\mathsf{T}} = \pi_0(1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{6}) = \pi_0(1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}) = \pi_0(8, 12, 6, 1)/8 = (8, 12, 6, 1)/27.$$

c) Intenzita výstupu ze stavu 0 je 3, a tak doba setrvání řetězce v tomto stavu má exponenciální rozdělení $\Gamma(3,1)$ s intenzitou 3. Odpovídající střední hodnota je $1/3$ a to v hodinách, což odpovídá době 20 minut.

3. Určitou radiovou stanici si naladí nový posluchač v průměru každou minutu, přičemž tyto události tvoří Poissonův proces, který je nezávislý na dobách poslechu stanice. Doby poslechu jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1 hodina. Označme X_t počet posluchačů rozhlasové stanice v čase $t \geq 0$.

   (a) Sestavte matici intenzit přechodu řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$. (2 body)

   (b) Rozhodněte, zda existuje limitní rozdělení řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$ a určete jej, pokud existuje. (2 body)

   (c) Spočtěte střední počet posluchačů v ustáleném provozu. (2 body)

a) Jde o systém obsluhy $(M/M/\infty)$. Zde individuální intenzita příchodu je $\lambda = 1/\text{min}$ a individuální intenzita odchodu je $\mu = 1/\text{hod}$. V hodinách máme $\lambda = 60, \mu = 1$. Celková intenzita nárůstu je pak $\lambda_j = \lambda = 60$, celková intenzita poklesu je $\mu_j = j\mu = j, j \in \mathbb{N}_0$. Matice intenzit přechodu je pak tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -60 & 60 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -61 & 60 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -62 & 60 & \ddots \\ 0 & 0 & 3 & -63 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

b) Podmínky na stacionární rozdělení nám dávají $\pi_k = \frac{\lambda_{k-1}\cdots\lambda_0}{\mu_k\cdots\mu_1}\pi_0 = \frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k\pi_0 = \frac{60^k}{k!}\pi_0$. Těmto podmínkám odpovídá Poissonovo rozdělení s parametrem 60, tedy

$$\pi_k = \frac{60^k}{k!}e^{-60}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

c) Střední počet posluchačů v ustáleném provozu je $\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = 60$, neboť střední hodnota Poissonova rozdělení je rovna jeho parametru.

Poznámka: V obecném modelu množení a zániku vždy existuje netriviální invariantní míra s koeficienty ve tvaru $\eta_k = \frac{\lambda_{k-1}\cdots\lambda_0}{\mu_k\cdots\mu_1}\eta_0$, která se ovšem ne vždy dá znormovat na pravděpodobnost. Tyto hodnoty vyhovují soustavě rovnic $0 = \eta^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}$ ve tvaru

$$\lambda_0\eta_0 = \mu_1\eta_1, \quad (\mu_k + \lambda_k)\eta_k = \lambda_{k-1}\eta_{k-1} + \mu_{k+1}\eta_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Označíme-li $\eta_k^* = \eta_k(\lambda_k + \mu_k)$ pro $k \in \mathbb{N}_0$, kde $\mu_0 = 0$, pak platí

$$\eta_0^* = \tfrac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1}\eta_1^*, \quad \eta_k^* = \tfrac{\lambda_{k-1}}{\mu_{k-1}+\lambda_{k-1}}\eta_{k-1}^* + \tfrac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+1}+\lambda_{k+1}}\eta_{k+1}^*, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Tedy $\eta^* = (\eta_k^*)_{k=0}^{\infty}$ řeší soustavu rovnic $\eta^{*\mathsf{T}} = \eta^{*\mathsf{T}}\mathbf{Q}^*$ a máme zde invariantní míru pro vnořený řetězec.